Analysis

Keine Ahnung von Steckbriefaufgaben

Dieses Wissen erzeugt Routine

Datei Nr. 42070

Stand:15. November 2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Steckbriefaufgaben sind sozusagen die Umkehrung der Kurvendiskussion. Bei einer Kurvendiskussion ist eine Funktion gegeben und man bestimmt aus der Funktionsgleichung die geometrischen Eigenschaften des Funktionsgraphen. Bei einer Steckbriefaufgabe sind geometrische Eigenschaften einer Kurve gegeben. Gesucht ist eine Funktion, deren Graph genau diese Eigenschaften aufweist.

Für die gesuchte Funktion macht man entsprechend dem Grad der Funktion einen allgemeinen Ansatz dieser Art:

	allgemein	bei Symmetrie	
Grad 2:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^2 + b$	(Symm. zur y-Achse)
Grad 3:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^3 + bx$	(Symm. zum Ursprung)
Grad 4:	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$	(Symm. zur y-Achse)

Um die noch unbekannten Koeffizienten a, b, usw. berechnen zu können, benötigt man genau so viele Kurveneigenschaften in Form von Gleichungen, wie man Koeffizienten sucht.

Hier eine **Liste der gebräuchlichsten Kurveneigenschaften** mit den zugehörigen Gleichungen.

(1) Gegeben eine **Kurvenpunkt**, z. B.: $P(1|3)$. Dann gilt $f(1) = 3$.

(2) Gegeben eine **Tangentensteigung** in P, z. B. m = -2. Dann gilt $f'(1) = -2$.

(3) Gegeben eine **Normalensteigung** z. B, m = 4 bei x = 2. Dann gilt $f'(2) = -\frac{1}{4}$

(4) Gegeben ein **Extrempunkt** z. B. $H(-1|5)$. Dann gilt: $f'(-1) = 0$ (Waagr. Tangente in H)
und $f(-1) = 5$ (y-Koordinate von H).

(5) Gegeben ein **Wendepunkt** z. B: $W(1|-2)$. Dann ist $f''(1) = 0$. (Krümmungswechsel
und $f(1) = -2$ (y-Koordinate von W)

(6) Gegeben ein **Terrassenpunkt** z. B: $W(5|\frac{1}{2})$. Dann ist $f''(1) = 0$. (Krümmungswechsel
und $f'(5) = 0$ (Waagrechte Tangente)
und $f(5) = \frac{1}{2}$ (y-Koordinate von W)

Nun eine Übung dazu.

Liste zum selbst ausfüllen	
Aus dieser Kurveneigenschaft	**folgt diese Funktionseigenschaft für f:**
Die Kurve K geht durch den Punkt $P(-1\,|\,2)$	
K schneidet die x-Achse an der Stelle 7.	
K hat an der Stelle 2 die Steigung 3.	
K hat in $P\left(\frac{3}{2}\,|\,-4\right)$ die Steigung -2	
K berührt an der Stelle 2 die Gerade g: $y = x + 1$	
K hat in $C(3\,|\,5)$ eine Tangente parallel zu g:… $y = 2x - 1$	
K hat in $C(3\,|\,5)$ eine Tangente senkrecht zu g: $y = 2x - 1$	
K berührt an der Stelle a den Graphen von g.	
K schneidet den Graphen von g bei a senkrecht.	
K hat den Tiefpunkt $T(-1\,|\,4)$	
K hat den Hochpunkt $H(3\,|\,-1)$	
K hat den Wendepunkt $W(-2\,|\,3)$	
K hat den Terrassenpunkt $Q(3\,|\,-3)$	
K berührt die x-Achse bei x = 5	
K hat bei x = 3 die Wendetangente $y = -x + 1$	
K schneidet die x-Achse bei x = 4 unter dem Winkel 30°	
K berührt die erste Winkelhalbierende bei x = 2,5	
$A(5\,|\,3)$ liegt auf K und K ist symmetrisch zur Geraden x = 2	
K ist punktsymmetrisch zu $Z(1\,|\,2)$ und $A(3\,|\,1)$ liegt auf K (Dann ist Z Mittelpunkt von A und A').	

Liste der Steckbrief-Folgerungen

Aus dieser Kurveneigenschaft	**folgt diese Funktionseigenschaft**
Die Kurve K geht durch den Punkt $P(-1\mid 2)$.	$f(-1)=2$
K schneidet die x-Achse an der Stelle 7.	7 ist Nullstelle der Funktion: $f(7)=0$
K hat an der Stelle 2 die Steigung 3.	$f'(2)=3$
K hat in $P(\frac{3}{2}\mid -4)$ die Steigung -2.	1. $f(\frac{3}{2})=-4$ und 2. $f'(\frac{3}{2})=-2$
K berührt an der Stelle 2 die Gerade g: $y=x+1$	1. Der Berührpunkt hat dann die y-Koordinate 3 also $f(2)=3$ und 2. $f'(2)=1=m_g$
K hat in $C(3\mid 5)$ eine Tangente parallel zu g:… $y=2x-1$	1. $f(3)=5$ und 2. $f'(3)=m_g=2$
K hat in $C(3\mid 5)$ eine Tangente senkrecht zu g: $y=2x-1$	1. $f(3)=5$ und 2. $f'(3)=-\frac{1}{m_g}=-\frac{1}{2}$
K berührt an der Stelle a den Graphen von g.	1. $f(a)=g(a)$ und 2. $f'(a)=g'(a)$
K schneide den Graphen von g bei a senkrecht.	1. $f(a)=g(a)$ und 2. $f'(a)=-\frac{1}{g'(a)}$
K hat den Tiefpunkt $T(-1\mid 4)$	1. $f(-1)=4$ und 2. $f'(-1)=0$
K hat den Hochpunkt $H(3\mid -1)$	1. $f(3)=-1$ und 2. $f'(3)=0$
K hat den Wendepunkt $W(-2\mid 3)$	1. $f(-2)=3$ und 2. $f''(-2)=0$
K hat den Terrassenpunkt $Q(3\mid -3)$	1. $f(3)=-3$, 2. $f'(3)=0$ und 3. $f''(3)=0$
K berührt die x-Achse bei x = 5	1. $f(5)=0$ und 2. $f'(5)=0$
K hat bei x = 3 die Wendetangente $y=-x+1$	1. Der Wendepunkt ist $W(3\mid -2)$ d. h. $f(3)=-2$ 2. $f'(3)=-1$ und $f''(3)=0$
K schneidet die x-Achse bei x = 4 unter dem Winkel 30°	1. $f(4)=0$ und 2. $f'(4)=\tan 30^\circ \left(=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
K berührt die erste Winkelhalbierende bei x = 2,5	1. $f(2{,}5)=2{,}5$ und 2. $f'(2{,}5)=1$
$A(5\mid 3)$ liegt auf K und K ist symmetrisch zur Geraden x = 2	Dann gilt $f(2-h)=f(2+h)$. Also liegt auch $A'(-1\mid 3)$ auf K: $f(-1)=3$
K ist punktsymmetrisch zu $Z(1\mid 2)$ und $A(3\mid 1)$ liegt auf K. Dann ist Z Mittelpunkt von A und A'.	Spiegelt man A an Z, erhält man $A'(-1\mid 3)$ als Spiegelbild auf K: $f(-1)=3$

Drei Musterbeispiele

(1) Eine Parabel K geht durch $A(-1|3)$ und hat berührt die Gerade g: $y = 2x - 5$ bei x = 4.
Stelle die Gleichung der Funktion f auf, deren Schaubild diese Parabel ist.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $f'(x) = 2ax + b$

Bedingungen für a, b, c:

(1) $A(-1|3) \in K$ d. h. $f(-1) = 3$ d.h. $a - b + c = 3$

(2) Berührpunkt B bei x = 4. Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen in die Tangentengleichung: $y_B = 2 \cdot \boxed{4} - 5 = 3$. Der Berührpunkt ist also $B(4|3) \in K$: $f(4) = 3$ d. h. $16a + 4b + c = 3$

(3) Die Tangentensteigung entnimmt man der Geradengleichung: m = 2.
Also gilt für die Stelle 4: $f'(4) = 2$ d. h. $8a + b = 2$

Gleichungssystem für a, b und c:
$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b + c &=& 3 \\ 16a + 4b + c &=& 3 \\ 8a + b &=& 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} (1) \\ \sim (2) \\ (3) \end{array}$$

Elimination von c durch (2) – (1) $15a + 5b = 0$ (4)

Aus (4) folgt: $b = -3a$ (5)

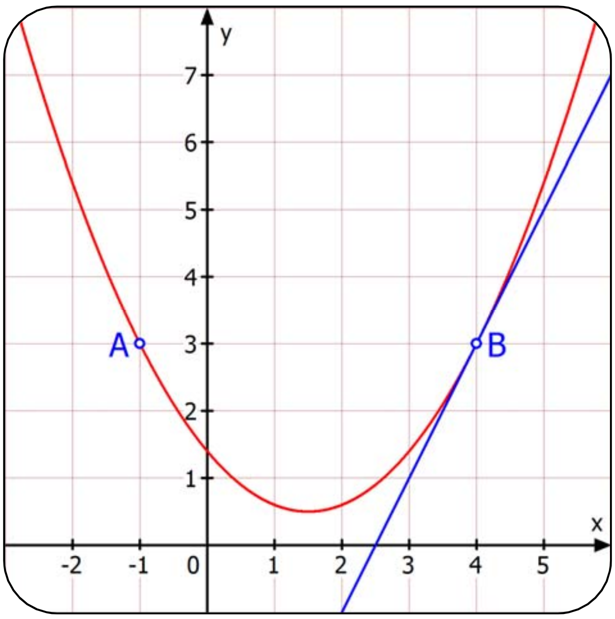
Einsetzen in (3): $8a - 3a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{5}}$

Aus (5) folgt damit $\boxed{b = -\frac{6}{5}}$

Aus (1) folgt schließlich: $c = 3 + b - a = 3 - \frac{6}{5} - \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{5}}$

Ergebnis: $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$

Zur Veranschaulichung noch das Schaubild K von f:



(2) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat den Hochpunkt $H\left(2 \mid \frac{7}{3}\right)$ und den Wendepunkt $W\left(0 \mid -3\right)$. Bestimmte den Funktionsterm von f.

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen für a, b, c und d;

(1)	$H\left(2 \mid \frac{7}{3}\right) \in K$	d. h. $f(2) = \frac{7}{3}$		d. h.	$8a + 4b + 2c + d = \frac{7}{3}$
(2)	H ist Hochpunkt:	$f'(2) = 0$		d. h.	$12a + 4b + c = 0$
(3)	$W\left(0 \mid -3\right) \in K$:	$f(0) = -3$		d. h.	$d = -3$
(4)	W ist Wendepunkt:	$f''(0) = 0$		d. h.	$2b = 0 \Rightarrow b = 0$

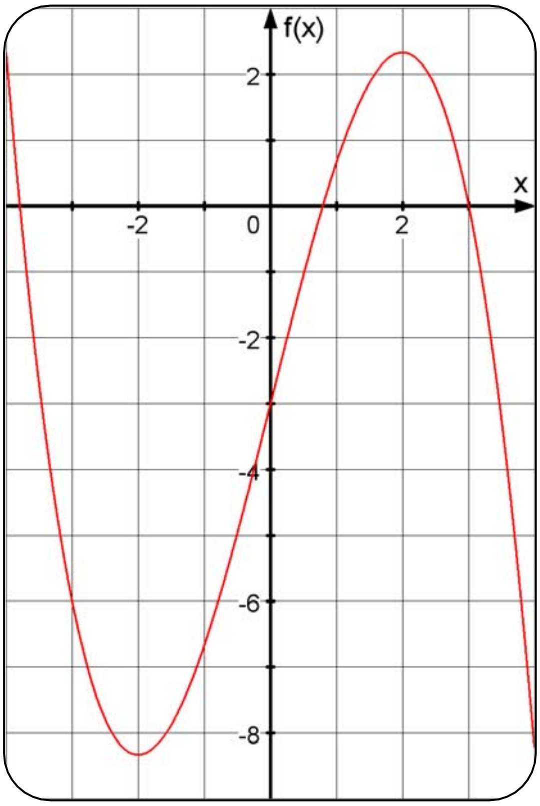
Gleichungssystem für a und c: $\begin{Bmatrix} 8a + 2c - 3 = \frac{7}{3} \\ 12a + c = 0 \end{Bmatrix}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Aus (2) erhält man $c = -12a$

Einsetzen in (1): $8a - 24a = \frac{16}{3} \Rightarrow -16a = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{3}}$

Es folgt: $c = -12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{c = 4}$

Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 3$



(3) Die ganzrationale Funktion f 4. Grades hat ein zur y-Achse symmetrisches Schaubild K.
K hat bei x = 2 die Wendetangente g: $y = -2x + 6$.
Welche Gleichung hat f?

Lösung:

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$, $f''(x) = 12ax^2 + 2b$

Bedingungen für a, b und c:

(1) $x_W = 2$. W liegt auf g: $y_W = -4 + 6 = 2 \Rightarrow W(2\,|\,2)$: $16a + 4b + c = 2$

(2) Die Steigung der Wendetangente ist -2: $f'(2) = -2$: $32a + 4b = -2$

(3) W ist Wendepunkt, also ist $f''(2) = 0$: $48a + 2b = 0$

Aus (3) folgt: $b = -24a$

In (2): $32a - 96a = -2 \Leftrightarrow -64a = -2 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{32}}$

Damit erhält man $b = -24 \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{4}}$

Aus (1) folgt: $c = 2 - 16a - 4b = 2 - 16 \cdot \frac{1}{32} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 - \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow \boxed{c = \frac{9}{2}}$

Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$